Räkneövning 9

Vågrörelselära & Kvantfysik, FK2002

9 januari 2012

Problem 41.3

En elektron i vila accelereras av en potentialskillnad $U = 120$ V. Vad blir dess de Broglie-våglängd?

Lösning:

Elektronen tillförs den kinetiska energin $E_{kin} = q_e U$ när den accelereras,

$$E_{kin} = \frac{m_e v^2}{2} = \frac{p^2}{2m_e} = q_e U \Rightarrow p^2 = 2m_e q_e U \tag{1}$$

de Broglie-våglängden ges av $\lambda = \frac{h}{p}$, där vi får rörelsemängden p från ekv. 1

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e q_e U}} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 120}} \text{ [m]} = 1.12 \cdot 10^{-10} \text{ m} \tag{2}$$

Svar: Elektronens de Broglie-våglängd blir 0.112 nm.

Problem 41.8

En foton och en elektron har de Broglie-våglängd $\lambda = \frac{h}{p} = 5$ nm. Jämför deras energier i elektronvolt!

Lösning:

Fotonens energi, E_γ, kan uttryckas

$$E_\gamma = pc = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{-9}} \text{ [J]} = 4.0 \cdot 10^{-17} \text{ J} = 0.25 \text{ keV} \tag{3}$$

Elektronens energi, E_e

$$E_e = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{h^2}{2m_e\lambda^2} = \frac{(6.63 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot (5 \cdot 10^{-9})^2} \text{ [J]} = ... = 0.06 \text{ eV} \tag{4}$$

Ett mer direkt sätt att jämföra fotonens och elektronens energier är att ställa upp uttrycket

$$\frac{E_e}{E_\gamma} = \frac{h^2}{2m_e\lambda^2} \cdot \frac{\lambda}{hc} = \underbrace{\frac{h}{m_e c}}_{\lambda_C} \cdot \frac{1}{2\lambda} = \frac{\lambda_C}{2\lambda} = \frac{2.43 \cdot 10^{-12} \text{ [m]}}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-9} \text{ [m]}} = 2.4 \cdot 10^{-4} \tag{5}$$

Problem 41.13

Beräkna de Broglie-våglängden för en elektron med energi $E = 80$ eV inuti ($U = -20$ eV) och utanför ($U = 0$) en potentialgrop.

Lösning:

Elektronens totala energi E är summan av dess kinetiska energi K och den potentiella energin U

$$E = K + U = \frac{p^2}{2m} + U = 80 \text{ eV} \tag{6}$$

de Broglie-våglängden, $\lambda = \frac{h}{p}$, där rörelsemängden $p = \sqrt{2m(E-U)}$ fås från ekv. 6

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E-U)}} \tag{7}$$

Utanför potentialgropen är $U = 0$, vilket ger $(E - U) = E = 80$ eV,

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 80 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}}} \text{ m} = 1.37 \cdot 10^{-10} \text{ m} \tag{8}$$

Inuti potentialgropen är $U = -20$ eV, vilket ger $(E - U) = 80 - (-20) = 100$ eV,

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E-U)}} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 100 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}}} \text{ m} = 1.23 \cdot 10^{-10} \text{ m} \tag{9}$$

Problem 41.P5

En partikel befinner sig i en potentialgrop (låda med $U = 0$ inuti och $U = \infty$ vid väggarna), som sträcker sig från $x = 0$ till $x = L$. Formulera vågfunktionen för partikelns grundtillstånd och beräkna sannolikheten att hitta partikeln inom intervallet $\frac{L}{4} < x < \frac{3L}{4}$.

Lösning:

(Se sid. 865 i boken, för härledning av vågfunktionen). Med randvillkoren $\psi(0) = \psi(L) = 0$ blir lösningen till Schrödingers vågekvation (ekv. 41.11):

$$\psi_n(x) = A\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \text{för n=1,2,3,...} \tag{10}$$

För grundtillståndet, $n = 1$, fås vågfunktionen

$$\psi(x) = A\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \tag{11}$$

Vågfunktionen $\psi(x)$ representerar en sannolikhets-våg för partikeln, där $P = \int_a^b \psi^2 dx$ tolkas som "sannolikheten att hitta partikeln inom intervallet $a < x < b$". Först måste vi bestämma konstanten A, genom att normera sannolikheten att hitta partikeln någonstans i lådan till $P = \int_0^L \psi^2 dx = 1$

$$\begin{aligned} P &= \int_0^L \psi^2 dx = A^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \left\{\frac{\pi x}{L} = y \Rightarrow dx = \frac{L}{\pi}dy\right\} \\ &= A^2\frac{L}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(y)dy = A^2\frac{L}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}\left(1-\cos(2y)\right)dy \\ &= A^2\frac{L}{2\pi}\left[y - \frac{1}{2}\sin(2y)\right]_0^\pi = A^2\frac{L}{2\pi}\pi = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{L}} \end{aligned} \tag{12}$$

Nu när vi har normerat vågfunktionen, $\psi(x) = \sqrt{2/L}\sin(\pi x/L)$, kan vi beräkna sannolikheten att hitta partikeln i intervallet $\frac{L}{4} < x < \frac{3L}{4}$

$$\begin{aligned} P &= \int_{L/4}^{3L/4} \psi^2 dx = \frac{2}{L}\int_{L/4}^{3L/4} \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \left\{\frac{\pi x}{L} = y \Rightarrow dx = \frac{L}{\pi}dy\right\} \\ &= \frac{2}{L}\frac{L}{\pi}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin^2(y)dy = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{1}{2}\left(1-\cos(2y)\right)dy \\ &= \frac{1}{\pi}\left[y - \frac{1}{2}\sin(2y)\right]_{\pi/4}^{3\pi/4} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] \approx 0.82 = \textbf{Svar!} \end{aligned} \tag{13}$$

Problem 41.24

Antag att en elektron är instängd i en potentialgrop ("låda" med längd $L = 10^{-14}$ m med $U = \infty$ vid väggarna). *a)* Beräkna elektronens energi i grundtillståndet, *b)* Med $L = 10^{-14}$ m $\approx$ storleken av en atomkärna, diskutera vad sannolikheten är att klämma in en elektron där...

Lösning:

Vi såg att att vågfunktionen för en partikel i en låda ges av

$$\psi_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \text{för n=1,2,3,...} \tag{14}$$

Med vågtalet $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{L}$ tillsammans med de Broglies formel $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$ ser vi att partikelns hastigheter $v_n = \frac{nh}{2mL}$ är kvantiserade, alltså är även dess energinivåer kvantiserade:

$$E_n = \frac{mv_n^2}{2} = \frac{n^2h^2}{8mL^2} \tag{15}$$

En elektron med massa m_e i grundtillståndet ($n = 1$) i en låda med längd $L = 10^{-14}$ m har alltså energi

$$E_1 = \frac{h^2}{8m_eL^2} = \frac{(6.63 \cdot 10^{-34})^2}{8 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot (10^{-14})^2} \text{ J} = 3.77 \cdot 10^9 \text{ eV} = \textbf{a) Svar!} \tag{16}$$

Energin i grundtillståndet för en elektron inuti en atomkärna $E_1 = 3.77$ GeV är väldigt hög jämfört med typiska värden för nukleoners bindningsenergi ($E_b \approx 1 - 9$ MeV, sid 906 i boken) eller kärnpartiklars typiska massor (protonmassan $m_p \approx 0.94$ GeV/c^2). *"Trying to get it there is like trying to force an elephant into a dog house"* (Lord Rutherford)

Problem 41.26

En elektron befinner sig i en potentialgrop med längd 0.2 nm. Vad är osäkerheten i dess rörelsemängd?

Lösning:

Heisenbergs obestämbarhetsrelation, $\Delta x \Delta p \geq h$. Osäkerheten för elektronens position, $\Delta x = 0.2$ nm, vilket ger

$$\Delta p \geq \frac{h}{\Delta x} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \text{ [Js]}}{0.2 \cdot 10^{-9} \text{ [m]}} = 3.3 \cdot 10^{-24} \text{ kgm/s} \tag{17}$$

Problem 41.27

Livstiden för ett exciterat tillstånd är 10^{-8} s. Vad är osäkerheten i energin och frekvensen för en utsänd foton?

Lösning:

Heisenbergs obestämbarhetsrelation kan också skrivas, $\Delta E \Delta t \geq h$. Osäkerheten för livslängden av det exciterade tillståndet, $\Delta t = 10^{-8}$ s, vilket ger

$$\Delta E \geq \frac{h}{\Delta t} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \text{ [Js]}}{10^{-8} \text{ [s]}} = 6.63 \cdot 10^{-26} \text{ J} \tag{18}$$

Frekvensen för en foton vars energi $E = \Delta E$

$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{1}{\Delta t} \text{ [s}^{-1}\text{]} = 10^{8} \text{ Hz} \tag{19}$$

Problem 41.28

En proton är instängd i en atomkärna med radie $r = 2 \cdot 10^{-14}$ m. *a)* Uppskatta osäkerheten för dess rörelsemängd och *b)* beräkna den kinetiska energi som motsvarar osäkerheten i rörelsemängden.

Lösning:

Vi använder Heisenbergs obestämbarhetsrelation $\Delta x \Delta p \geq h$ med $\Delta x = 2 \cdot 10^{-14}$,

$$\Delta p \geq \frac{h}{\Delta x} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \text{ [Js]}}{2 \cdot 10^{-14} \text{ [m]}} = 3.31 \cdot 10^{-20} \text{ kgm/s} \tag{20}$$

Osäkerheten för rörelsemängden motsvarar den kinetiska energin

$$E_{kin} = \frac{(\Delta p)^2}{2m_p} = \frac{(3.31 \cdot 10^{-20})^2}{2 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}} \text{ [J]} = 3.28 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 2.05 \text{ MeV} \tag{21}$$