

Räkneövning 8

Vågrörelselära & Kvantfysik, FK2002

9 januari 2012

Problem 40.1

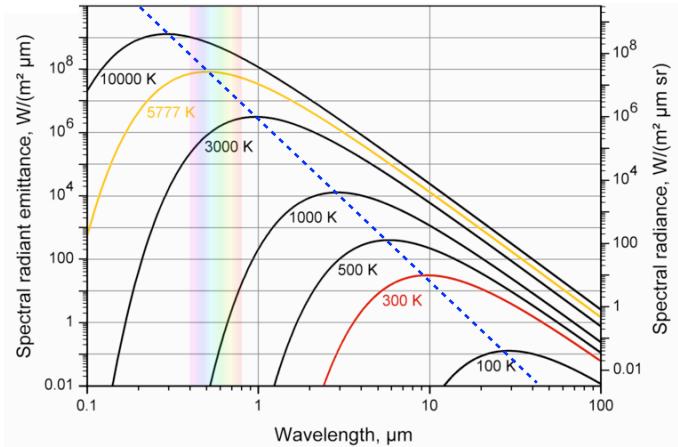
Vad är våglängden för emissionsmaximum λ_{max} , hos en svartkropps-strålare med temperatur

- a) $T = 3 \text{ K}$ (typ kosmiska mikrovågsbakgrundsen)
- b) $T = 3000 \text{ K}$ (typ glödtråd av Volfram i en glödlampa)
- c) $T = 10^7 \text{ K}$ (typ fusions-reaktion)

Lösning:

Intensiteten av strålningen från en svartkropp med temperatur T ges av Plancks strålningslag (ekv. 40.5 i boken)

$$I(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad (1)$$



För att hitta våglängden λ_{max} för strålningsmaximum, kan man derivera med avseende på våglängden λ

$$\frac{\partial I(\lambda, T)}{\partial \lambda} = 0 \quad (2)$$

Om man löser ekv. 2 får man ett resultat som är känt som *Wiens förskjutningslag* (ekv. 40.1 i boken, blå streckad linje i figuren ovan)

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}, \text{ där } b = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K} \quad (3)$$

Numeriska värden på λ_{max} för de olika temperaturerna blir

- a) $\lambda_{max} = \frac{2.898 \cdot 10^{-3} [\text{m}\cdot\text{K}]}{3 [\text{K}]} = 9.7 \cdot 10^{-4} \text{ m} \approx 1 \text{ mm}$
- b) $\lambda_{max} = \frac{2.898 \cdot 10^{-3} [\text{m}\cdot\text{K}]}{3 \cdot 10^3 [\text{K}]} = 9.7 \cdot 10^{-7} \text{ m} \approx 1 \mu\text{m}$
- c) $\lambda_{max} = \frac{2.898 \cdot 10^{-3} [\text{m}\cdot\text{K}]}{10^7 [\text{K}]} = 2.9 \cdot 10^{-10} \text{ m} \approx 0.3 \text{ nm}$

Problem 40.9

En radiostation sänder ut vågor med frekvens $f = 100 \text{ MHz}$ med en effekt på $W = 40 \text{ kW}$. Hur många fotoner/sekund sänds ut?

Lösning:

Effekten W är den totala energin hos radiovågorna som sänds ut per sekund

$$W = \frac{E_{tot}}{t} = 40 \cdot 10^3 \text{ [W = J/s]} \quad (4)$$

Varje foton har energi

$$E_\gamma = hf = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ [Js]} \cdot 10^8 \text{ [s}^{-1}] = 6.63 \cdot 10^{-26} \text{ J} \quad (5)$$

Antalet fotoner/sekund som sänds ut blir

$$N = \frac{W}{E_\gamma} = \frac{40 \cdot 10^3 \text{ [J/s]}}{6.63 \cdot 10^{-26} \text{ [J]}} \approx 6 \cdot 10^{29} \text{ fotoner per sekund} \quad (6)$$

Problem 40.11

Ljus med våglängd $\lambda = 400 \text{ nm}$ och intensitet $I = 10^{-9} \text{ W/m}^2$ slår ut elektroner från ytan av en bit Kalium (där uträdesarbetet uppmäts till $\Phi = 2.25 \text{ eV}$). Vad är den maximala kinetiska energin E_k hos fotoelektronerna?

Lösning:

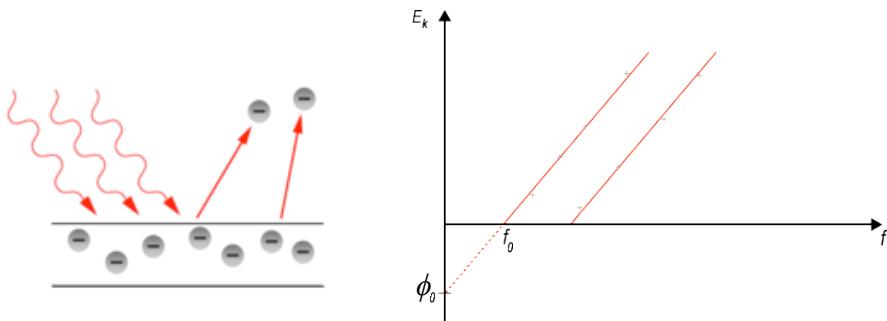
Den maximala kinetiska energin en fotoelektron kan ha beror bara på våglängden hos det infallande ljuset

$$E_k = hf - \Phi = \frac{hc}{\lambda} - \Phi \quad (7)$$

Fotonernas energi är

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34} [\text{Js}] \cdot 3 \cdot 10^8 [\text{m/s}]}{400 \cdot 10^{-9} [\text{m}]} = 4.97 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3.11 \text{ eV} \quad (8)$$

Den maximala kinetiska energin hos en fotoelektron blir alltså $E_k = 3.11 - 2.25 = 0.86 \text{ eV}$



Figur 1: Fotoelektrisk effekt: En foton lämnar över all sin energi i en enda stöt när den väl träffar på en elektron i metallen (t.v.). $\phi_0 = hf_0$ är uträdesarbetet, dvs. den energi som krävs för att en elektron ska kunna frigöras. f_0 är den minsta frekvens som krävs för att frigöra elektronerna.

Problem 40.13

Tröskelvåglängden för fotoelektrisk effekt hos Cesium är $\lambda_0 = 686$ nm. Om ljus med våglängd $\lambda = 470$ nm infaller mot Cesium, vad blir fotoelektronernas maxhastighet?

Lösning:

Utträdesarbetet svarar mot en tröskelfrekvens f_0 (för $f < f_0$ sker ingen fotoelektrisk effekt), dvs. $\Phi = hf_0$ och vi kan skriva om ekv. 7

$$hf(f - f_0) = E_k = \frac{m_e v_{max}^2}{2} \quad (9)$$

Uttrycket för fotoelektronens maxhastighet kan då skrivas som

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2h(f - f_0)}{m_e}} = \sqrt{\frac{2hc(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0})}{m_e}} \quad (10)$$

Med numeriska värden på Plancks konstant, $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ Js, och elektronens massa (i SI-enheter), $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg, får vi att $v_{max} = 5.4 \cdot 10^5$ m/s = 540 km/s.

Problem 40.25

Vad är frekvensen hos en foton, vars energi är två gånger elektronens vilomassa? Vad är dess rörelsemängd?

Lösning:

Vi har sett att elektronvolt [eV] är smidig enhet att jobba med, där 1 eV är den energi det går åt att flytta en elektron (med laddning $q_e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ Coulomb) över en potentialskillnad $U = 1$ Volt (alltså, $1 \text{ eV} = q_e U = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$).

Elektronens vilomassa är (i SI-enheter) $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg. Kilogram är en rätt otymplig enhet när man sysslar med enskilda partiklar - den "naturliga enheten" inom partikelfysiken är alltsom oftast *elektronvolt*. Det mesta (massa, längd, temperatur) kan uttryckas i elektronvolt.

Exempelvis gäller för elektronens vilomassa

$$E_0 = m_e c^2 = 9.11 \cdot 10^{-31} [\text{kg}] \cdot (3 \cdot 10^8 [\text{m/s}])^2 = 8.2 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 511 \text{ keV} \quad (11)$$

(Alltså säger man att elektronens massa, $m_e = E_0/c^2 = 511 \text{ keV}/c^2$)

En foton med frekvens f har energin $E = hf$. Vi söker frekvensen för en elektron vars energi $E = 2E_0$

$$f = \frac{E}{h} = \frac{2E_0}{h} = \frac{2m_e c^2}{h} = \frac{2 \cdot 511 \cdot 10^3 [\text{eV}]}{4.14 \cdot 10^{-15} [\text{eVs}]} = 2.5 \cdot 10^{20} \text{ Hz} \quad (12)$$

Fotonens rörelsemängd

$$p = \frac{E}{c} = \frac{2E_0}{c} = 2m_e c = 2 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ kgm/s} = 5.5 \cdot 10^{-22} \text{ kgm/s} \quad (13)$$

(Alternativt hade man kunnat svara med naturliga enheter ätt rörelsemängden blir $p = 2m_e c = 1022 \text{ keV}/c$)

Problem 40.29

Röntgen-fotoner med energi $E = 40$ keV sprids mot elektroner (Compton-spridning). Vad är i detta fall den maximala kinetiska energin för en Compton-spredd elektron?

Lösning:

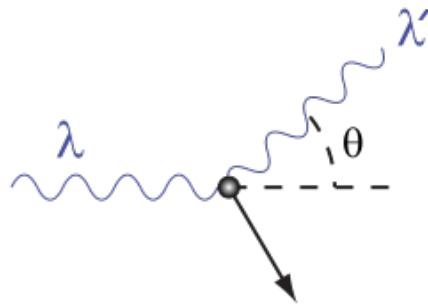
Våglängden för en foton som sprids mot en elektron ändras

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C (1 - \cos \theta) \quad (14)$$

Elektronens Compton-våglängd, λ_C

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c} \quad (15)$$

Vi ser att maximala ändringen av fotonens våglängd



$$(\Delta\lambda)_{max} = \lambda_C(1 + 1) = 2\lambda_C \quad (\text{för } \theta = \pi) \quad (16)$$

Energin hos fotonen efter spridningen

$$E' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda + 2\lambda_C} = \frac{hc}{\frac{hc}{E} + 2\frac{h}{m_e c}} = \frac{E}{1 + \frac{2E}{m_e c^2}} \quad (17)$$

Eftersom den totala energin är konstant ($E_{innan} = E_{efter}$) där $E_{innan} = E = 40$ keV och $E_{efter} = E' + K$, får vi att den maximala kinetiska energin som elektronen kan ha $K_{max} = E - E'$

$$K_{max} = E - \frac{E}{1 + \frac{2E}{m_e c^2}} = 40 - \frac{40}{1 + \frac{2 \cdot 40}{511}} \text{ [keV]} = 5.4 \text{ keV} \quad (18)$$

Problem 40.31

En foton har våglängden $\lambda = \lambda_C$ (där λ_C är Compton-våglängden). Vad är fotonens energi?

Lösning:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_C} = \frac{hc \cdot m_e c}{h} = m_e c^2 = 511 \text{ keV} \quad (19)$$