Räkneövning 7

Vågrörelselära & Kvantfysik, FK2002

9 januari 2012

Problem 38.7

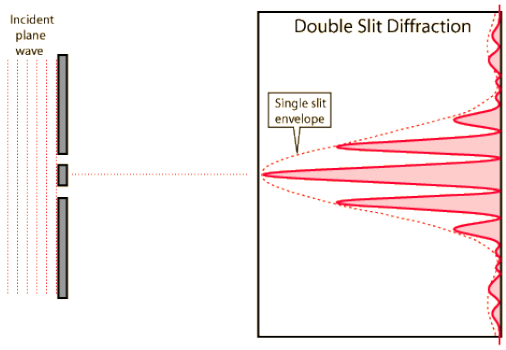
I ett dubbelspalts-experiment är avståndet mellan spalterna $d = 0.6$ mm och bredden på spaltöppningarna är $a = 0.15$ mm. Hur många interferens-fransar är det innanför centrala diffraktions-maximum?

Lösning:

Bilden t.h illustrerar interferensmönstret på en skärm uppställd på avstånd L. Mönstret är resultatet av diffraktion (streckad linje) *och* interferens (fyllda linjer).
Villkoret för intensitetsminimum p.g.a diffraktion

$$a \sin\theta \ = n\lambda \qquad (1)$$

med $n = 1, 2, 3, ..$



Positionen på skärmen för n:te ordningens diffraktionsminimum blir

$$y_n^D = L\tan\theta \approx L\sin\theta = \frac{nL\lambda}{a} \qquad (2)$$

Villkoret för intensitetsmaximum p.g.a interferens (mellan ljusstrålar som går genom olika spalter)

$$d\sin\theta \ = m\lambda \qquad (3)$$

där $m = 0, 1, 2, ...$ På samma sätt blir positionen för m:te ordningens interferensmaximum

$$y_m^I = L\tan\theta \approx L\sin\theta = \frac{mL\lambda}{d} \qquad (4)$$

Vi söker vilka interferens-fransar som ligger innanför första diffraktions-minimum, dvs. $y_m^I \leq y_{n=1}^D$. Vi använder ekv. 2 och 4

$$\frac{mL\lambda}{d} \leq \frac{1 \cdot L\lambda}{a} \Rightarrow m \leq \frac{d}{a} = \frac{0.6 \text{ mm}}{0.15 \text{ mm}} = 4 \qquad (5)$$

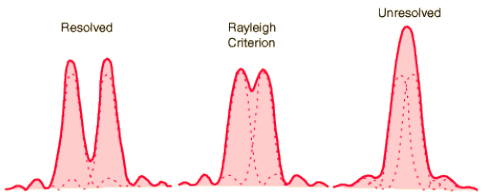
Alltså, innanför centrala diffraktionsmaximum finns interferens-maxima med ordning $m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4 = 7$ fransar.

Problem 38.11

Vad är minsta separationen mellan två punkter på månens yta som man kan upplösa med *a)* ögat (pupilldiameter, $d = 5$ mm)*b)* ett teleskop med diameter $d = 4.5$ m?

Lösning:

Det minsta vinkelavståndet mellan två punkter som kan upplösas ges av Rayleigh's kriterium (se bild t.v). En bild sägs vara diffraktions-begränsad när den ena punktens första diffraktions-maximum sammanfaller med den andra bildens första diffraktions-minimum.



För ljus med våglängd λ som passerar genom en cirkulär apertur (öppning) med diameter d blir den kritiska vinkeln

$$\sin\theta_c = 1.22\frac{\lambda}{d} \tag{6}$$

Med våglängd $\lambda \approx 550$ nm (synligt ljus) får vi olika kritiska vinklar för de olika apertur-storlekarna *a)* $d = 5{\cdot}10^{-3}$ m (ögats pupill) och *b)* $d = 4.5$ m (teleskopets diameter)

$$\theta_c^a = \sin^{-1}\left(1.22\frac{550\cdot 10^{-9}}{5\cdot 10^{-3}}\right) \approx 1.34\cdot 10^{-4}\ \text{rad} \tag{7}$$

$$\theta_c^b = \sin^{-1}\left(1.22\frac{550\cdot 10^{-9}}{4.5}\right) \approx 1.49\cdot 10^{-9}\ \text{rad} \tag{8}$$

Dessa vinklar är mycket små, alltså gäller $\theta \approx \tan\theta = x/L$.
Med månens avstånd från jorden $L \approx 380000$ km, kan vi översätta detta vinkelavstånd till ett avstånd x mellan två punkter på månens yta som kan upplösas

$$x_a \approx L\cdot\theta_c^a = 3.8\cdot 10^8\cdot 1.34\cdot 10^{-4}\ \text{m} \approx 51\ \text{km} \tag{9}$$

$$x_b \approx L\cdot\theta_c^b = 3.8\cdot 10^8\cdot 1.49\cdot 10^{-7}\ \text{m} \approx 57\ \text{m} \tag{10}$$

Problem 38.17

Ett gitter med 300 linjer/mm används för att analysera ljus med våglängder $\lambda = 410.1$ nm och $\lambda' = 656.3$ nm. Vad är vinkelavståndet mellan dessa linjer i *a)* första ordningen *b)* andra ordningen? *c)* Överlappar 2:a och 3:e ordningen?

Lösning:

Gitterkonstanten $d = \frac{1}{300}$ mm är given. Vi får maxima då

$$d \sin\theta = m\lambda \qquad \text{(för ordning } m = 0, 1, 2, 3, ...) \tag{11}$$

Första ordningen innebär $m = 1$ och vi får

$$\theta_1 = \sin^{-1}\left(\frac{1 \cdot \lambda}{d}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{410.1 \cdot 10^{-9}}{\frac{1}{300} \cdot 10^{-3}}\right) = 0.1233 \text{ rad} = 7.06^\circ \tag{12}$$

$$\theta_1' = \sin^{-1}\left(\frac{1 \cdot \lambda'}{d}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{656.3 \cdot 10^{-9}}{\frac{1}{300} \cdot 10^{-3}}\right) = 0.1982 \text{ rad} = 11.3^\circ \tag{13}$$

Vilket ger vinkelseparationen $\Delta\theta_1 = \theta_1' - \theta_1 = 0.075$ rad $= 4.3^\circ$.
Andra ordningen innebär $m = 2$ och vi får

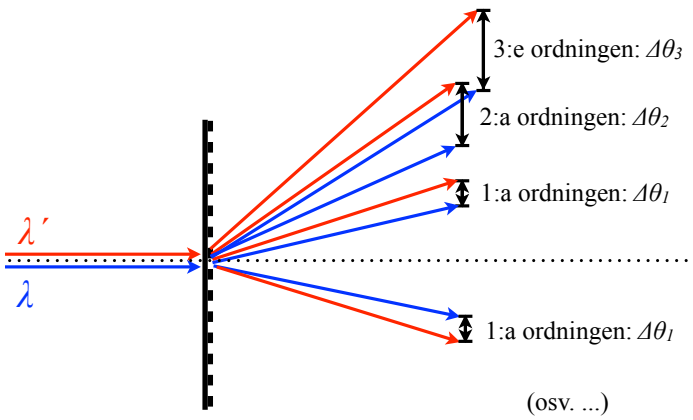
$$\theta_2 = \sin^{-1}\left(\frac{2 \cdot \lambda}{d}\right) = ... = 0.2486 \text{ rad} = 14.2^\circ \tag{14}$$

$$\theta_2' = \sin^{-1}\left(\frac{2 \cdot \lambda'}{d}\right) = ... = 0.4048 \text{ rad} = 23.2^\circ \tag{15}$$

Vilket ger vinkelseparationen $\Delta\theta_2 = \theta_2' - \theta_2 = 0.1562$ rad $= 8.9^\circ$.
Tredje ordningen innebär $m = 3$ och vi får

$$\theta_3 = \sin^{-1}\left(\frac{3 \cdot \lambda}{d}\right) = ... = 0.3781 \text{ rad} = 21.7^\circ \tag{16}$$

Eftersom $\theta_3 = 21.7^\circ$ och $\theta_2' = 23.2^\circ$ ser vi redan att det blir ett visst överlapp.



Problem 38.27

Ljus med våglängd $\lambda = 656.2$ nm går igenom en spaltöppning med bredd $a = 0.08$ mm. *a)* Vid vilken vinkel inträffar första diffraktions-minimum? *b)* Vad är intensiteten (relativt centrala diffraktions-maximat) vid halva vinkeln (från uppgift a) ?

Lösning:

För enkelspalt inträffar första minimum när $a \sin\theta_1 = \lambda$. Vi får vinkeln

$$\theta_1 \approx \sin\theta_1 = \frac{\lambda}{a} = \frac{656.2 \cdot 10^{-9}}{0.08 \cdot 10^{-3}} = 0.00820 \text{ rad} \approx 0.47^\circ \tag{17}$$

Intensiteten för diffraktionsmönstret från en enkelspalt med bredd a ges av ekv. 38.10 i boken

$$I = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} \tag{18}$$

Där $\alpha = \frac{2\pi a \ \sin\theta}{\lambda}$ och I_0 är intensiteten för $\theta = 0$. Det frågas nu efter intensiteten för halva vinkeln, $\theta_1/2$, i svaret från deluppgift *a)* (ekv. 17). Vi får att

$$\alpha = \frac{2\pi a}{\lambda} \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \approx \frac{2\pi a}{\lambda}\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = \frac{\pi a}{\lambda}\theta_1 = \pi \tag{19}$$

Nu kan vi använda att $\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ och sätta in i ekv. 20

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \approx 0.4 \tag{20}$$