Räkneövning 6

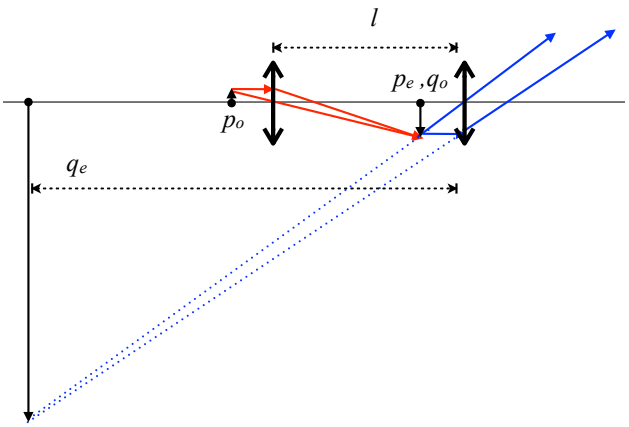
Vågrörelselära & Kvantfysik, FK2002

1 december 2011

Problem 36.23

Avståndet mellan två konvexa linser i ett mikroskop, $l = 17.5$ cm. Fokallängden för objektivet $f_o = 0.8$ cm och för okularet $f_e = 3$ cm. Vad är vinkelförstoringen om avståndet från okularet till bilden är $q_e = -40$ cm?

Lösning:



Idén med ett mikroskop är att använda objektivet för att ge en reell mellanbild (förstorad några tiotal gånger) som därefter används som objekt till okularet. I uppgiften är det givet att bildavståndet från okularet, $q_e = -40$ cm (ofta placeras mellanbilden i okularets främre fokalplan vilket ger en slutbild i oändligheten).Vi får därför räkna allting "baklänges" och börja med att se var okularets objekt hamnar,

$$\frac{1}{p_e} = \frac{1}{f_e} - \frac{1}{q_e} = \frac{1}{3} - \frac{1}{-40}\ \text{cm}^{-1} \Rightarrow p_e = \frac{120}{43} \approx 2.79\ \text{cm} \tag{1}$$

Detta objekt är alltså "mellanbilden" från objektivet, på bildavstånd (från objektivet) $q_o = l - p_e \approx 14.71$ cm. Nu kan vi beräkna vad objektsavståndet är,

$$\frac{1}{p_o} = \frac{1}{f_o} - \frac{1}{q_o} = \frac{1}{0.8} - \frac{1}{14.7}\ \text{cm}^{-1} \Rightarrow p_o \approx 0.846\ \text{cm} \tag{2}$$

Ekv. 36.6 i boken ger uttrycket för vinkelförstoringen

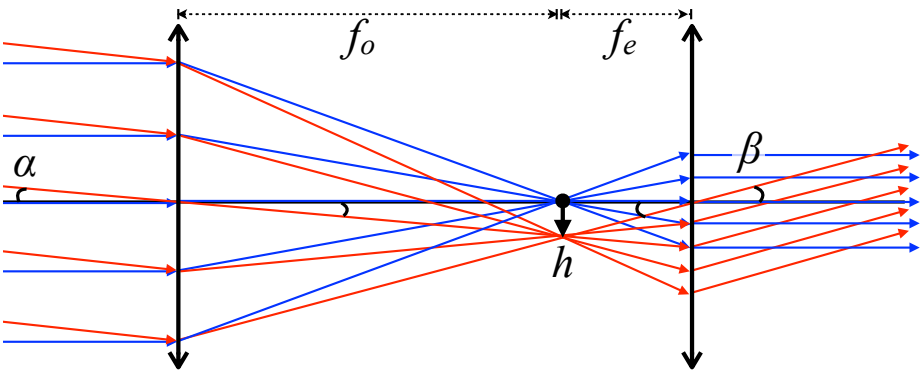
$$M = \frac{\beta}{\alpha_{25}} = -\frac{q_o}{p_o} \cdot \frac{0.25}{p_e} \approx \frac{0.147}{0.00846} \cdot \frac{0.25}{0.0279} \approx 156 \tag{3}$$

(I verkligheten vet man oftast inte vad bildavståndet är, och då är ekvation 36.7 med bilden i oändligheten mer lämpad). Ett rimligt svar på vinkelförstoringen är närmevärdet $M \approx 160$.

Problem 36.29

Två konvexa linser i ett teleskop är separerade med 65 cm. Om bilden är i oändligheten och vinkelförstoringen är 25, vad är linsernas fokallängder?

Lösning:



För att få en slutbild i oändligheten måste objektivets och okularets fokus sammanfalla (där mellanbilden hamnar, $q_o = f_o$ och $p_e = f_e$). Det innebär att

$$f_o + f_e = 65 \text{ cm} \tag{4}$$

Vinkelförstoringen (för slutbild i oändligheten, se ekv. 36.10 i boken) är given i uppgiften

$$M_\infty = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{f_o}{f_e} = -25 \tag{5}$$

(I sista steget använde vi $\alpha \approx \tan\alpha = \frac{h}{f_o}$ och $\beta \approx \tan\beta = \frac{h}{f_e}$)
Två okända (f_o och f_e) och två ekvationer - va kul! Vi får att

$$f_o = 25\ f_e \Rightarrow f_e + 25\ f_e = 26\ f_e = 65 \text{ cm} \tag{6}$$

Alltså, $f_e = \frac{65}{26} \approx 2.5$ cm och $f_o = 25 f_e \approx 62.5$ cm.

Problem 37.5

I ett dubbelspalts-experiment uppmäts avståndet mellan fjärde maxima till 7 cm. Vad är ljusets våglängd λ om spaltöppningarnas separation $d = 0.2$ och avståndet till skärmen är $L = 3.0$ m?

Lösning:

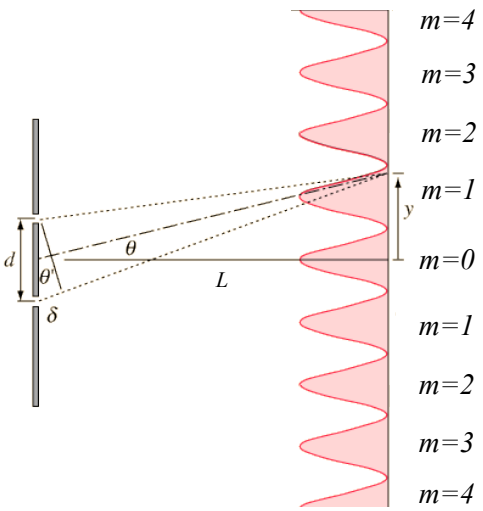
Då $d \ll L$ gäller småvinkel-approximationen och vägskillnaden för två ljusstrålar genom vardera spaltöppning kan skrivas

$$\delta = d \sin\theta \approx d \tan\theta = d \cdot \frac{y}{L} \quad (7)$$

När vägskillnaden $\delta_m = m\lambda$ (heltal $m = 0, 1, 2...$) fås konstruktiv interferens i punkten y_m på skärmen

$$y_m = m\frac{\lambda L}{d} \quad (8)$$

I uppgiften är det givet att avstånden mellan två maxima ($m = 4$) är 7 cm, dvs. $y_4 = \frac{7}{2} = 3.5$ cm.



Vi får att ljusets våglängd är

$$\lambda = \frac{d \sin\theta}{4} \approx \frac{d \tan\theta}{4} = \frac{d \cdot y_4}{4 \cdot L} = \frac{0.2 \cdot 10^{-3} \cdot 3.5 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 3.0} \text{ m} \approx 583 \text{ nm} \quad (9)$$

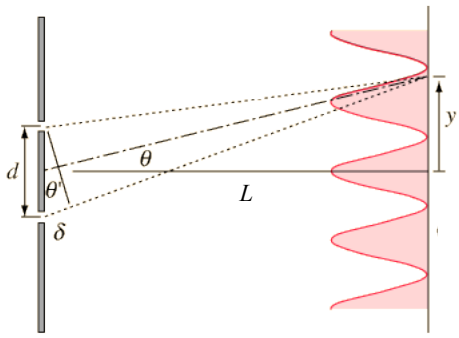
Problem 37.12

I ett dubbelspalts-experiment räknar man 7 ”fransar” per centimeter på en skärm på avstånd $L = 2$ m från spaltöppningarna. Vad är spaltöppningarnas separation d om ljusets våglängd $\lambda = 510$nm ?

Lösning:

Då $d \ll L$ gäller småvinkel-approximationen och vägskillnaden för två ljusstrålar genom vardera spaltöppning kan skrivas

$$\delta = d \sin\theta \approx d \tan\theta = d \cdot \frac{y}{L} \quad (10)$$



När vägskillnaden $\delta_m = m\lambda$ (heltal $m = 0, 1, 2...$) fås konstruktiv interferens i punkten y_m på skärmen

$$y_m = m\frac{\lambda L}{d} \quad (11)$$

I uppgiften är det givet att avstånden mellan maxima (eller minima) är

$$\Delta y = y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda L}{d} = \frac{1}{7} \text{ cm} \quad (12)$$

Alltså blir spaltöppningarnas separation,

$$d = \frac{\lambda L}{\Delta y} = \frac{510 \cdot 10^{-9} \cdot 2}{\frac{1}{7} \cdot 10^{-2}} = 7.14 \cdot 10^{-4} \text{ m} \approx 0.7 \text{ mm} \quad (13)$$

Problem 37.22

En lins med fokallängd f fokuserar ljuset som gått genom en dubbelspalt på en vägg som ligger i fokalplanet. Visa att positionen för *minima* ges av

$$y_m = \frac{(2m+1)f\lambda}{2d} \tag{14}$$

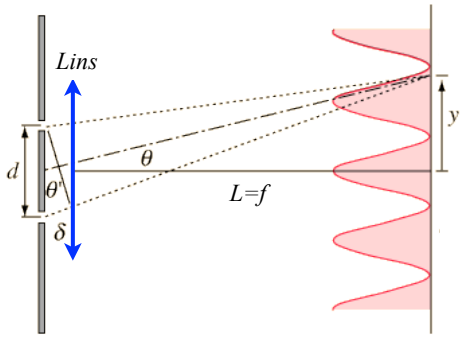
Lösning:

Vi vet att när vägskillnaden $\delta = d\sin\theta$ för ljusstrålarna är halva våglängder fås destruktiv interferens (minima),

$$d\sin\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \tag{15}$$

Då $d \ll f$ gäller återigen småvinkel-approximationen

$$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{y_m}{f} \tag{16}$$



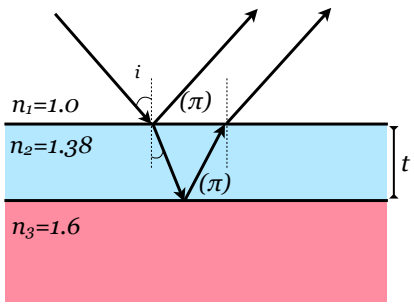
Positionen på skärmen y_m för minima ges då av uttrycket

$$y_m = f\tan\theta \approx f\sin\theta = f \cdot \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda}{d} = \frac{(2m+1)f\lambda}{2d} \tag{17}$$

Problem 37.31

Glas (brytningsindex, $n_3 = 1.6$) är belagt med en tunn film av magnesiumflourid MgF_2 (brytningsindex, $n_2 = 1.38$) med tjocklek $t = 8.3 \cdot 10^{-7}$ m. Vilka (synliga) våglängder försvinner (pga. destruktiv interferens) om *vitt ljus* reflekteras mot ytan?

Lösning:



Destruktiv interferens uppstår när fasskillnaden mellan de två reflekterade vågorna $\Delta\phi = (2m + 1)\pi$, dvs. halva våglängdsskillnader, $\delta_m = (m + \frac{1}{2})\lambda$ med heltal $m = 0, 1, 2, 3...$

Dels uppkommer en fasskillnad på $180° = \pi$ för en våg som reflekteras mot ett medium med högre brytningsindex och dels en fasskillnad som motsvaras av den optiska vägskillnaden ljusstrålarna går.

Sträckan som den transmitterade vågen går i filmen $\delta \approx 2t$ (om man som i bokens exempel 37.3 antar att ljuset faller in vinkelrätt mot ytan). Vi får destruktiv interferens då

$$\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_{film} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{n_2} \approx 2t \tag{18}$$

Nu återstår bara att se för vilka tal m vi får destruktiv interferens för synliga våglängder (400nm $< \lambda <$ 700 nm)

$$\lambda_m = \frac{4tn_2}{2m+1} = \frac{4 \cdot 8.3 \cdot 10^{-7} \cdot 1.38}{2m+1} = \begin{cases} \frac{4580}{7} = 654 \text{ nm} & , m = 3 \\ \frac{4580}{9} = 509 \text{ nm} & , m = 4 \\ \frac{4580}{11} = 416 \text{ nm} & , m = 5 \end{cases} \tag{19}$$