Räkneövning 5

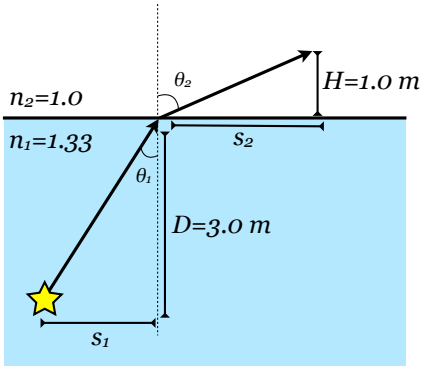
Vågrörelselära & Kvantfysik, FK2002

29 november 2011

Problem 35.9

En dykare som befinner sig på djupet $D = 3$ m under vatten riktar en ljusstråle (med infallsvinkel $\theta_i = 30°$) mot vattenytan. På vilket (horisontellt) avstånd S från dykaren bör en person i en båt (på höjden $H = 1$ m ovanför vattenytan) befinna sig för att se ljuset?

Lösning:



Vi försöker lösa uppgiften utan miniräknare...
Snells lag ger vid gränsytan mellan vatten (med brytningsindex $n_1 = 1.33$) och luft (med brytningsindex $n_2 = 1$)

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin 30° \qquad (1)$$

De horisontella avstånden s_1 och s_2

$$s_1 = D \cdot \tan 30° = D \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ m} \qquad (2)$$

$$s_2 = H \cdot \tan\theta_2 = H \cdot \sqrt{\frac{\sin^2\theta_2}{1-\sin^2\theta_2}} = \frac{H \cdot n_1}{\sqrt{4-n_1^2}} \text{ m} \qquad (3)$$

Det totala horisontella avståndet $S = s_1 + s_2$ blir

$$S = \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{1 \cdot 1.33}{\sqrt{4-(1.33)^2}} \text{ m} \qquad (4)$$

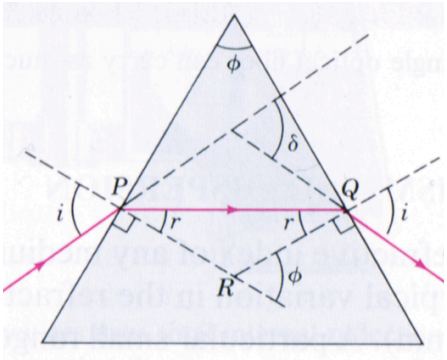
Problem 35.17

Vinkeln för minsta avvikelse $\delta_{min} = 41°$ för ett prisma. Vad är ljusets hastighet v_P i prismat?

Lösning:

Vinkeln för minsta avvikelse innebär att ljuset passerar symmetriskt genom prismat. Vid varje yta ändras ljusstrålens riktning med $\Delta\theta = i - r$ vilket innebär att den totala avvikelsen blir

$$\delta_{min} = 2 \cdot (i - r) = 41° \tag{5}$$



Snells lag ger vid gränsytan mellan luft (med brytningsindex $n = 1$) och prismat (med brytningsindex n_p)

$$n \sin i = n_p \sin r \Longrightarrow n_p = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c}{v_p} \tag{6}$$

Vi kan då beräkna ljusets hastighet i prismat som

$$v_p = \frac{c}{n_p} = \frac{\sin r}{\sin i} \cdot c \tag{7}$$

Vinklarna i och r får vi genom att titta lite på geometrin i figuren: Först ser vi med hjälp av triangeln PQR där ytornas normaler skär varandra att

$$r = \frac{\phi}{2} = \frac{60°}{2} = 30.0° \tag{8}$$

och sen kan vi använda informationen som gavs i uppgiften (ekv. 5) att

$$i = \frac{\delta_{min}}{2} + r = \frac{41°}{2} + 30° = 50.5° \tag{9}$$

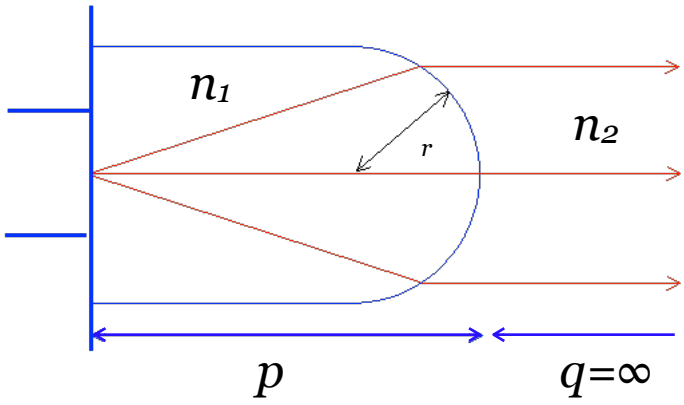
Vi sätter in dessa vinklar i ekv. 7

$$v_P = \frac{\sin\theta_r}{\sin\theta_i} \cdot c = \frac{\sin 30.0°}{\sin 50.5°} \cdot c \approx 0.65c = 0.65 \cdot \left(3 \cdot 10^8 \text{ m/s}\right) \approx 1.9 \cdot 10^8 \text{ m/s} \tag{10}$$

Lysdioden och begreppen Objekts- och Bildrymd

En lysdiod är en lysande punkt inkapslad i en plastknopp (PMMA-plast med brytningsindex $n_1 = 1.49$) som ska vara utformad så att ljuset blir parallellt. Om krökningsradien $r = 2$ mm, hur lång bör lysdioden vara?

Lösning:



Vi söker lysdiodens längd, vilket är avståndet p mellan objektet (ljuspunkten) och den brytande ytan. Vi vill att ljusstrålarna ska vara parallella, dvs. "bilden" projiceras på avståndet $q = \infty$.

För att ha koll på tecknen kan vi använda begreppen
Objektsrymd (OR): den sida om en brytande yta varifrån ljuset kommer.
Bildrymd (BR): den sida om en brytande yta vartåt ljuset är på väg.

Om objekt/bild är i "rätt" rymd (dvs. objekt i OR och bild i BR) innebär det att p, q är positiva. Om objektet är i BR ("virtuellt objekt") eller bilden i OR ("virtuell bild") är p, q negativa.
Krökningsradien definierar vi som positiv om vi sätter "passarnålen" i bildrymden.

Linsmakarformeln (ekv. 36.13 i boken) ger oss

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{r} \Longrightarrow \frac{1.49}{p} + \frac{1}{\infty} = \frac{1 - 1.49}{-2 \text{ mm}} \tag{11}$$

Vilket innebär att $p \approx 6.1$ mm (vilket verkar rimligt!)

Problem 35.27

En konvex spegel har krökningsradie $R = 40$ cm. Bestäm var bilden hamnar och den linjära ("laterala") förstoringen om objektets avstånd till spegeln är *a)* 15 cm *b)* 40 cm.

Lösning:

I uppgiften är Objektsrymd och Bildymd båda på vänster sida av spegeln i figuren. Vi har ett virtuellt fokus i $f = -R/2 = -20$ cm.
I deluppgift *a)* är objektsavståndet $p_a = 15$ cm och vi kan räkna ut var bilden hamnar med hjälp av spegelformeln

$$\frac{1}{q_a} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p_a} = \frac{1}{-20} - \frac{1}{15} = -\frac{7}{60}\ \text{cm}^{-1} \tag{12}$$

Vi får att bildavståndet $q_a = -\frac{60}{7} \approx -8.5$ cm, vilket innebär att vi får en virtuell bild. Laterala förstoringen blir

$$m_a = -\frac{q_a}{p_a} = -\left(\frac{-60/7}{15}\right) = \frac{4}{7} \approx 0.57 \tag{13}$$

Där $0 < m < 1$ innebär att vi har en rättvänd, förminskad bild.

I deluppgift *b)* är objektsavståndet $p_b = 40$ cm och vi får på liknande sätt

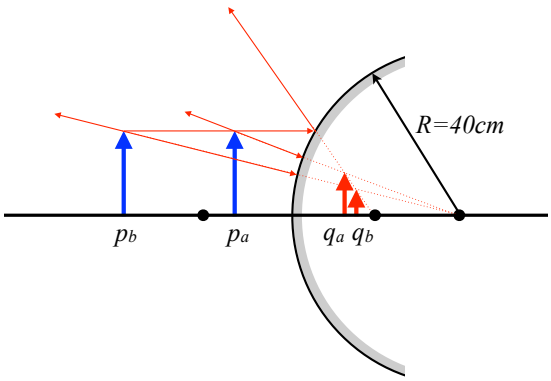
$$\frac{1}{q_b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p_b} = \frac{1}{-20} - \frac{1}{40} = -\frac{3}{40}\ \text{cm}^{-1} \tag{14}$$

Vi får att bildavståndet $q_b = -\frac{40}{3} \approx -13.3$ cm, vilket återigen innebär virtuell bild. Laterala förstoringen blir

$$m_b = -\frac{q_b}{p_b} = -\left(\frac{-40/3}{40}\right) = \frac{1}{3} \approx 0.33 \tag{15}$$

Där $0 < m < 1$ innebär att vi har en rättvänd, förminskad bild.

Strålgången för de båda fallen ser ut som följande



Problem 35.35

En konkav spegel producerar en bild som är 40% större än ett objekt placerat $p = 20$ cm från spegeln. Bestäm de möjliga brännvidderna hos spegeln.

Lösning:

Det finns två möjligheter: bilden kan antingen vara rättvänd eller upp&nerväند, alltså att förstoringen $m = \pm 1.4 = -\frac{\pm q}{p}$. Vi får två fall för bildavståndet

$$q = \begin{cases} -1.4p & \text{(virtuell bild när m>0)} \\ +1.4p & \text{(reell bild när m<0).} \end{cases} \tag{16}$$

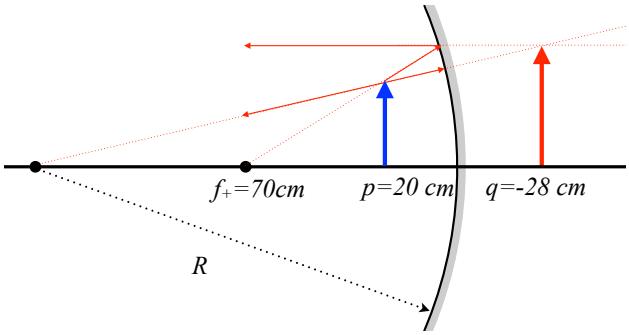
Insatt i spegelformeln får vi två möjligheter för brännvidden, f_+ (då $m > 0$) och f_- (då $m < 0$)

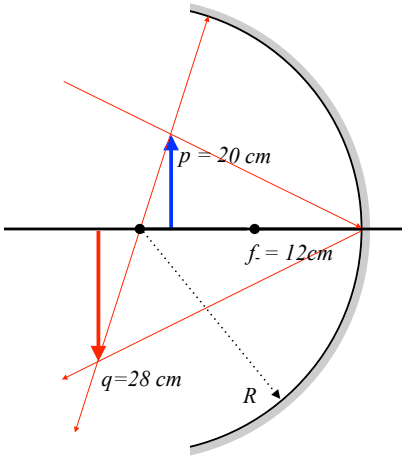
$$\frac{1}{f_+} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{-1.4p} = \frac{1}{20} + \frac{1}{-28} = \frac{1}{70} \Rightarrow f_+ = 70 \text{ cm} \tag{17}$$

och

$$\frac{1}{f_-} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{+1.4p} = \frac{1}{20} + \frac{1}{28} = \frac{3}{35} \Rightarrow f_- \approx 12 \text{ cm} \tag{18}$$

Strålgången för dessa fall skulle kunna se ut som följande





Problem 36.13

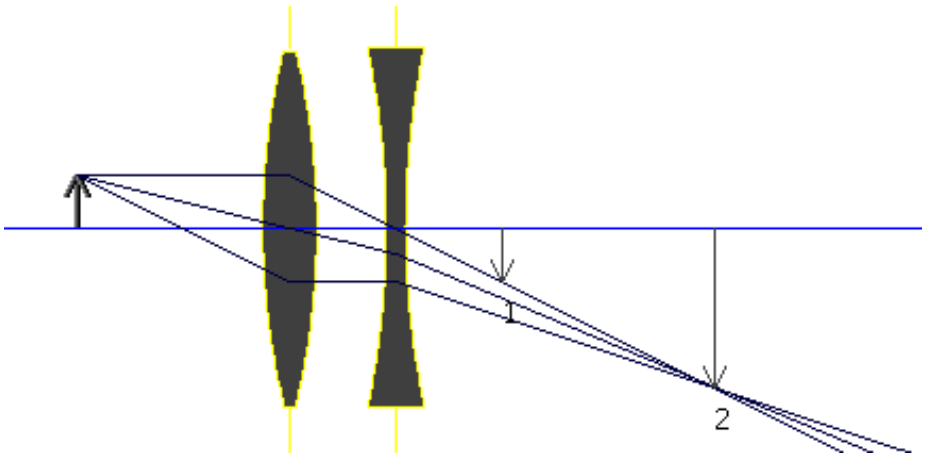
En samlingslins ("positiv"/konvex) med brännvidd $f_1 = 10$ cm och en spridningslins ("negativ"/konkav) med brännvidd $f_2 = -15$ cm är uppställda 10 cm ifrån varandra. Var avbildas ett objekt placerat $p_1 = 20$ cm framför första linsen?

Lösning:

(1) Först räknar vi på var objektet i p_1 avbildas av den första linsen

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{p_1} = \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{20}\right) \text{cm}^{-1} \Rightarrow q_1 = 20 \text{ cm} \tag{19}$$

(2) Vi kan nu betrakta bilden i q_1 (som är en reell bild, eftersom den ligger i BR) som ett *virtuellt objekt* på avstånd $-p_2 = 10 - q_1$ cm (negativt eftersom det fortfarande är i BR) som avbildas genom den andra linsen.

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{p_2} = \left(\frac{1}{-15} - \frac{1}{-10}\right) \text{cm}^{-1} \Rightarrow q_2 = 30 \text{ cm} \tag{20}$$

Vi kunde annars ha börjat med att rita strålgången som följande