Räkneövning 4

Vågrörelselära & Kvantfysik, FK2002

29 november 2011

Problem 17.23

En lastbil med hastighet $v_s = 25$ m/s sänder ut en signal med frekvens $f = 400$ Hz. Vad är våglängden en stillastående observatör uppmäter om lastbilen

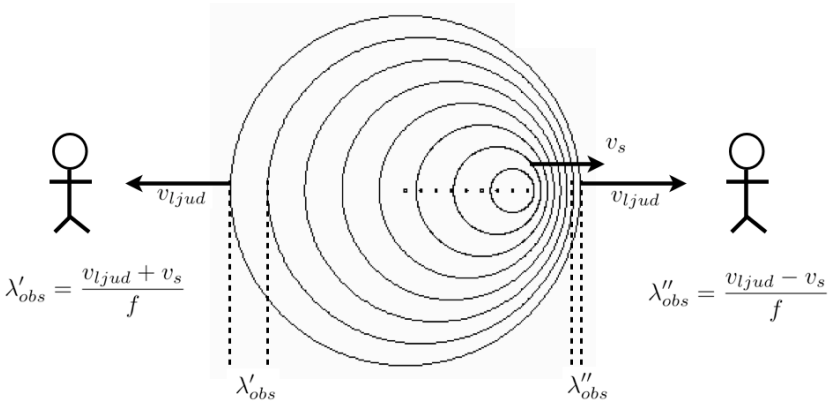
a) närmar sig?
b) avlägsnar sig?

Lösning:

Ett allmänt uttryck för hur den observerade frekvensen ändras på grund Dopplereffekten är

$$f_{obs} = \left(\frac{v_w \pm v_{obs}}{v_w \pm v_s} \right) \cdot f \tag{1}$$

I ekv. 1 är v_w vågens utbredningshastighet, v_s är källans hastighet och v_{obs} är observatörens hastighet. I vårt fall har vi en stillastående observatör $v_{obs} = 0$ och kan rita följande bild för att se hur den observerade våglängden ändras;



Vi får att den observerade våglängden λ_{obs} i fall a) och b) blir

$$\lambda''_{obs} = \frac{v_w - v_s}{f} = \frac{340 - 25}{400} \text{ m} = 0.79\text{m} \ \ = \textbf{(Svar a)} \tag{2}$$

$$\lambda'_{obs} = \frac{v_w + v_s}{f} = \frac{340 + 25}{400} \text{ m} = 0.91\text{m} \ \ = \textbf{(Svar b)} \tag{3}$$

Problem 17.27

Givet:

En bil med hastighet $v_s = 40$ m/s och en lastbil med hastighet $v_{obs} = 15$ m/s kör på samma väg. Bilens tuta har frekvensen $f = 400$ Hz. Hur ändras den observerade frekvensen då

a) bilen kör om lastbilen?
b) bilen och lastbilen möts?

Lösning:

Då bilen och lastbilen färdas i samma riktning får vi

$$\text{Före omkörning (s}\rightarrow\text{obs): } f_{obs,1} = \left(\frac{v_w - v_{obs}}{v_w - v_s}\right) f \tag{4}$$

$$\text{Efter omkörning (obs}\rightarrow\text{s): } f_{obs,2} = \left(\frac{v_w + v_{obs}}{v_w + v_s}\right) f \tag{5}$$

Frekvensen ändras alltså $\Delta f_{obs} = f_{obs,1} - f_{obs,2} = 60$ Hz = **(Svar a)**

Då bilen och lastbilen färdas i motsatt riktning får vi

$$\text{Före mötet (s}\rightarrow, \leftarrow\text{obs): } f_{obs,1} = \left(\frac{v_w + v_{obs}}{v_w - v_s}\right) f \tag{6}$$

$$\text{Efter mötet (}\leftarrow\text{ obs, s}\rightarrow\text{): } f_{obs,2} = \left(\frac{v_w - v_{obs}}{v_w + v_s}\right) f \tag{7}$$

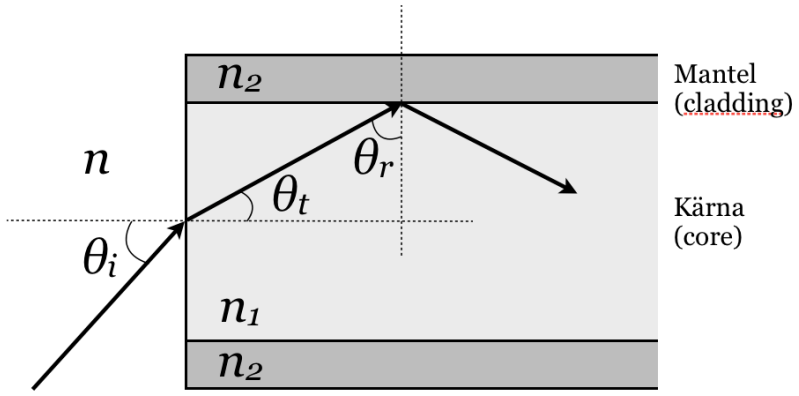
Frekvensen ändras alltså $\Delta f_{obs} = f_{obs,1} - f_{obs,2} = 130$ Hz = **(Svar b)**

Problem 35.15

Ljus leds in i en optisk fiber med brytningsindex $n_1 = 1.5$. Visa att totalreflektion sker för alla infallsvinklar θ_i

Alllmän bakgrund:

En optisk fiber består i allmänhet av en tråd (”kärna”) av material med högre brytningsindex omgiven av material (”mantel”) med något lägre brytningsindex. För att ljus ska ledas genom fibern krävs att infallsvinkeln mot gränsytan kärna/mantel hela tiden är större än gränsvinkeln för totalreflektion.



Lösning:

För att förvirra oss en smula mer än nödvändigt tittar vi först på det allmänna (och mer realistiska) fallet med en optisk fiberkärna med brytningsindex n_1 omgiven av en mantelyta med brytningsindex n_2. (Till slut kan vi kan vi sätta $n_2 = n = 1$ för att svara på frågan som den är ställd i boken!)

Vid infallsytan mellan luft och fibern får vi från Snells lag

$$n \sin\ \theta_i = n_1 \sin \theta_t \tag{8}$$

Den *minsta* vinkel θ_r som ger totalreflektion vid gränsytan mellan fiberkärnan och mantelytan får vi genom att åter använda Snells lag: $n_1 \sin\ \theta_r = n_2 \sin 90°$. För att garantera totalreflektion måste vi alltså kräva

$$\sin \theta_r \geq \frac{n_2}{n_1} \tag{9}$$

Relationen mellan vinklarna θ_i och θ_r fås genom det geometriska sambandet $\sin \theta_t = \sin(90° - \theta_r) = \cos \theta_r$. Då kan vi skriva

$$n \sin \theta_i = n_1 \sin \theta_t = n_1 \sin(90° - \theta_r) = n_1 \cos \theta_r \tag{10}$$

Om vi använder ”trigonometriska ettan” kan vi skriva om ekv. 10 ytterligare

$$n \sin \theta_i = ... = n_1 \cos \theta_r = n_1 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_r} \tag{11}$$

Om vi stoppar in kravet för totalreflektion från ekv. 9 kan vi skriva om ekv. 11

$$n \sin \theta_i \leq n_1 \sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \tag{12}$$

Detta uttryck är så viktigt att det har fått ett eget namn; "Numerisk Apertur". Den visar helt enkelt i vilket vinkelområde de infallande ljusstrålarna måste ligga för att kunna ledas vidare i fibern. Vi får det *största* värdet på infallsvinkeln θ_i som svarar mot det *minsta* värdet på vinkeln θ_r för att få totalreflektion.

I bokens uppgift har vi ingen mantelyta, så $n_2 = n = 1$, dvs.

$$\sin \theta_i \leq \sqrt{n_1^2 - 1} \tag{13}$$

Eftersom maxvärdet för $\sin \theta_i = 1$ räcker det att visa att

$$\sin \theta_i \leq 1 \leq \sqrt{n_1^2 - 1} \tag{14}$$

Vilket inträffar för

$$1 \leq \sqrt{n_1^2 - 1} \Longleftrightarrow \sqrt{2} \leq n_1 \tag{15}$$

I vårt fall är $n_1 = 1.5 > \sqrt{2}$, och alltså inträffar totalreflektion för alla infallsvinklar θ_i (v.s.v).