Räkneövning 3

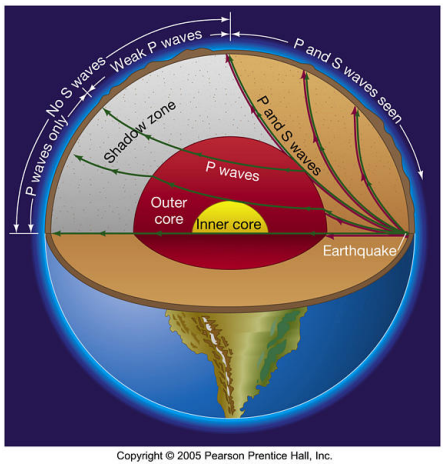
Vågrörelselära & Kvantfysik, FK2002

29 november 2011

Problem 16.5

Givet:

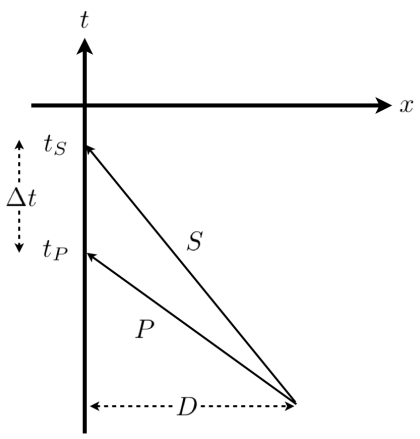
En jordbävning orsakar olika typer av seismiska vågor, bland annat; P-vågor (longitudinella primär-vågor) med våghastighet $v_p \approx 8000$ m/s och S-vågor (transversella sekundär-vågor) med våghastighet $v_s \approx 5000$ m/s.



Söks:

Om man detekterar dessa vågor med ett tidsintervall $\Delta t = 1.8$ minuter $=$ 108 sekunder, vad är avståndet D till jordbävningen? (Antag att vågorna utbreder sig längs räta linjer)

Lösning:



Vi kan åskådliggöra förloppet med ett rumtidsdiagram,, där $(x, t) = (0, 0)$ representerar "här och nu".

Vi kan ställa upp ett ekvationssystem

$$\begin{cases} t_p = \dfrac{D}{v_p} & (1) \\ t_s = \dfrac{D}{v_s} & (2) \\ \Delta t = t_s - t_p & (3) \end{cases}$$

3 okända och 3 ekvationer garanterar lösning!

Ekvation (1) och (2) insatt i (3) ger

$$\Delta t = \frac{D}{v_s} - \frac{D}{v_p} = \frac{Dv_p}{v_p v_s} - \frac{Dv_s}{v_p v_s} = D\frac{v_p - v_s}{v_p v_s} \tag{4}$$

Alltså, inträffade jordbävningen på avstånd

$$D = \Delta t \cdot \frac{v_p v_s}{v_p - v_s} = 108 \cdot \frac{8 \cdot 5}{8 - 5} \text{ km} = 1440 \text{ km} \tag{5}$$

(`http://web.ics.purdue.edu/~braile/edumod/slinky/slinky.htm`) kan erbjuda intressant läsning för den som vill veta mer...

Problem 16.39

Givet:

En oscillator med frekvens $f = 50$ Hz ger upphov till en transversell våg längs ett rep. Vågen har amplitud $y_0 = 0.8$ mm $= 0.8 \cdot 10^{-3}$ m, våghastigheten $v = 60$ m/s och repets linjära massdensitet $\mu = 3.5$ g/m $= 3.5 \cdot 10^{-3}$ kg/m.

Söks:

a) Vad är oscillatorns medeleffekt $\langle P \rangle$?
b) Vilken spännkraft behövs för att fördubbla effekten?

Lösning:

Ekvation (16.16) i boken ger att

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2}\mu(\omega y_0)^2 v = \frac{1}{2}\mu(2\pi f y_0)^2 v \tag{6}$$

Svar a) fås genom insättning av numeriska värden (med rätt enheter!)

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \cdot (3.5 \cdot 10^{-3}) \cdot (2\pi \cdot 50)^2 \cdot (8 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 60 = 6.6 \cdot 10^{-3} \text{ W} \tag{7}$$

(Enhetsanalys ger: [W] = Effekt = Energi/tid. Om vi tar ett välbekant uttryck för energi, säg $E = \frac{1}{2}mv^2$, får vi [W] = kg$\cdot$ m$^2\cdot$ s$^{-2}\cdot$s^{-1} = kg$\cdot$ m$^2\cdot$ s^{-3})

Svar b) Vi gör ett snabbt "proportionalitets-argument"

$$\langle P \rangle \propto v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \tag{8}$$

Fördubblad effekt $2\langle P \rangle$ motsvaras av $2\sqrt{F} = \sqrt{4 \cdot F}$, dvs. fyrdubbla spännkraften

$$4 \cdot F = 4\mu v^2 = 4 \cdot (3.5 \cdot 10^{-3}) \cdot 60^2 \text{ N} = 50 \text{ N} \tag{9}$$

Problem 17.5

Flytande kvicksilver har densiteten $\rho = 13.6$ g/cm^3 $= 13.6 \cdot 10^3$ kg/m^3 och bulkmodul $B = 2.8 \cdot 10^{10}$ Pa.

a) Vad är ljudhastigheten i flytande kvicksilver?
b) Beräkna våglängden av en ljudvåg med frekvensen $f = 1000$ Hz i kvicksilver.

Lösning:

Ekvation (17.12) i boken ger förhållandet mellan en våghastigheten hos longitudinell våg och mediets bulkmodul B och densitet ρ

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.8 \cdot 10^{10}}{13.6 \cdot 10^3}} \text{ m/s} = 1.44 \cdot 10^3 \text{ m/s} \tag{10}$$

Våglängden blir då helt enkelt

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1.44 \cdot 10^3}{1000} \text{ m} = 1.44 \text{ m} \tag{11}$$

Problem 17.19

En flöjt har längden $L = 60$ cm $= 0.60$ m.

a) Vad är flöjtens grundton då alla hålen täcks för?
b) Hur långt från munstycket bör ett hål öppnas för att grundtonen ska bli 330 Hz?

Lösning:

Vi betraktar flöjten som en *"öppen pipa"*. Då ges frekvenserna för deltonerna av ekv. (17.4) i boken

$$f_n = \frac{nv}{2L} \tag{12}$$

Grundtonen är den första deltonen, $(n = 1)$

$$f_1 = \frac{1 \cdot v}{2L} = \frac{1 \cdot 340 \text{ [m/s]}}{2 \cdot 0.60 \text{ [m]}} \approx 283 \text{ Hz } \mathbf{= (Svar\ a)} \tag{13}$$

Om ett hål öppnas på avstånd x från munstycket innebär det att luft kan strömma in där och att tryck-noden inte längre är vid flöjtens ändpunkt, L.

$$f_1 = \frac{1 \cdot v}{2x} = 330 \text{ Hz} \Rightarrow x = \frac{v}{2f_1} = \frac{340}{2 \cdot 330} \approx 0.515\text{m } \mathbf{= (Svar\ b)} \tag{14}$$

Problem 17.35

Två olika ljudkällor (tänk två olika högtalare i samma rum) har ljudintensitetsnivårena $\beta_1 = 80$ dB och $\beta_2 = 85$ dB. Vad blir den *totala* ljudintensitetsnivån β_{tot} i rummet?

Lösning:

Den totala ljudintensitets*nivån* $\beta_{tot} \neq \beta_1 + \beta_2$. Detta inses om man tar en titt på hur ljudintensitetsnivån är definierad

$$\beta \equiv 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \tag{15}$$

Det som ska adderas är ljudintensiteterna I_1 och I_2

$$\beta_1 = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I_1}{I_0}\right) = 80 \text{ dB} \quad \Leftrightarrow \quad I_1 = 10^{8.0} I_0 \tag{16}$$

$$\beta_2 = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I_2}{I_0}\right) = 85 \text{ dB} \quad \Leftrightarrow \quad I_2 = 10^{8.5} I_0 \tag{17}$$

$$\tag{18}$$

Den totala ljudintensiteten blir $I_{tot} = I_1 + I_2 = \left(10^{8.0} + 10^{8.5}\right) \cdot I_0$.

Alltså blir den totala ljudintensitetsnivån $\beta_{tot} = \beta(I_{tot}) = \beta(I_1 + I_2)$

$$\beta_{tot} = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I_1 + I_2}{I_0}\right) = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{\left(10^{8.0} + 10^{8.5}\right) \cdot I_0}{I_0}\right) = 86.2 \text{ dB} \tag{19}$$

Problem 17.41

En högtalare är kopplad till en förstärkare med effekten $P_{el} = 40$ W. Hela högtalarsystemet omvandlar den elektrisk energin till "akustisk" energi med en effektivitet på typiskt 0.5% (den mesta energin försvinner genom värmeutveckling i högtalarelementets magnetiska spole).

a) På vilket avstånd från högtalaren uppnås smärtgränsen $\beta_{aj} = 120$ dB?
b) På vilket avstånd från högtalaren uppnås "konversations-nivå" $\beta_{tal} = 60$ dB?

Lösning:

Den utsända akustiska effekten $P_{ak} = 40 \cdot 0.005 = 0.2$ W.
Intensiteten är Effekten/Yta (och vi antar att högtalaren kan betraktas som en punktkälla som sprider ljudet i alla riktningar)

$$I_{ak}(r) = \frac{P_{ak}}{4\pi r^2} \tag{20}$$

Vi söker avstånden r_{aj} och r_{tal} där ljudintensitetsnivån är

$$\beta_{aj} = 120 \text{ dB} = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I_{aj}}{I_0}\right) \Leftrightarrow I_{aj} = 10^{12} I_0 = 1 \text{ W/m}^2 \tag{21}$$

$$\beta_{tal} = 60 \text{ dB} = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I_{tal}}{I_0}\right) \Leftrightarrow I_{tal} = 10^{6} I_0 = 10^{-6} \text{ W/m}^2 \tag{22}$$

Om vi arrangerar om ekv. 20 och sätter in de beräknade ljudintensiteterna

$$r_{aj} = \sqrt{\frac{P_{ak}}{4\pi I_{aj}}} = \sqrt{\frac{0.2}{4\pi \cdot 1}} \text{ m} \approx 0.126 \text{ m} = \textbf{(Svar a)} \tag{23}$$

$$r_{tal} = \sqrt{\frac{P_{ak}}{4\pi I_{tal}}} = \sqrt{\frac{0.2}{4\pi \cdot 10^{-6}}} \text{ m} \approx 126 \text{ m} = \textbf{(Svar b)} \tag{24}$$