Räkneövning 2

Vågrörelselära & Kvantfysik, FK2002

29 november 2011

Problem 16.28

En gitarrsträng har längden $L = 0.60$ m och linjär masstäthet $\mu = 1.5 \times 10^{-3}$ kg/m. Om frekvensen för andra deltonen är 450 Hz, vad är spänningen F?

Lösning:

Från förra räkneövningen minns vi ekvation (16.1) från boken, som relaterar strängens spänning F och linjära masstäthet μ med våghastigheten,

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \tag{1}$$

Frekvensen för n:te deltonen (ekvation 16.3 i boken),

$$f_n = \frac{nv}{2L} \tag{2}$$

Givet är andra deltonens, $n = 2$, (= första övertonens) frekvens

$$f_2 = \frac{2v}{2L} = \frac{v}{L} = 450Hz \tag{3}$$

Vi kan nu kombinera ekvation (1) och (3)

$$f_2 L = v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \tag{4}$$

Kvadrering av båda sidor löser ut $F = \mu(f_2 L)^2 = 1.5 \times 10^{-3} \cdot (450)^2 \cdot (0.6)^2 = 1.1 \times 10^2 [kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2} \cdot m^2] = 110$ N **= Svar**

Problem 16.35

Givet:

En stående våg hos en sträng beskrivs av funktionen $y(x,t) = 0.02\sin(0.3x)\cos(25t)$, där $[x]$, $[y]$ = cm och $[t]$ = sekunder.

Söks:

a) Våglängden λ och våghastigheten v hos de två superpositionerade vågorna.
b) Strängens längd L, om $y(x,t)$ representerar den tredje deltonen.
c) Punkterna där partikelhastigheten, $v_y = 0$ hela tiden.

Lösning:

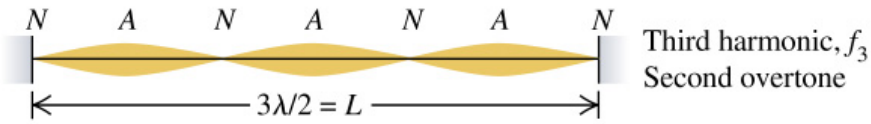
Den trigonometriska identiteten $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$ hjälper oss att skriva den stående vågen som en summa av två vågor

$$y(x,t) = 0.01\sin(0.3x + 25t) + 0.01\sin(0.3x - 25t) \tag{5}$$

Vi identifierar amplituden $A = 0.01$ cm, vågtalet $k = 0.3$ rad/cm och vinkelfrekvensen $\omega = \pm 25$ rad/s, och använder sambanden

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0.3} cm (\approx 21cm) \tag{6}$$

$$v = \lambda f = \frac{|\omega|}{k} = \frac{25}{0.3} cm/s (\approx 83cm/s) \tag{7}$$



Om $y(x,t)$ representerar tredje deltonen säger ekvation (16.12) i boken (eller bilden ovan) att

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \Rightarrow \lambda_3 = \frac{2L}{3} \tag{8}$$

Vilket innebär att strängens längd $L = \frac{3\lambda}{2} = \frac{3\cdot 2\pi}{2\cdot k} = \frac{3\cdot 2\pi}{2\cdot 0.3} = 10\pi$ cm ($\approx$ 31.4 cm)

Punkterna där partikelhastigheten $v_y(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -0.5\sin(0.3x)\cos(25t) = 0$ hela tiden, dvs. där $\sin(0.3x) = 0$, inträffar när $kx = m\pi$ (heltal, $m = 0, 1, 2...$).

$x_0 = 0$

$x_1 = \frac{1\cdot\pi}{k} = \frac{1\cdot\pi}{k} = \frac{1\cdot\pi}{0.3}$ cm$= \frac{1}{3}L$

$x_2 = \frac{2\cdot\pi}{k} = \frac{2\cdot\pi}{k} = \frac{2\cdot\pi}{0.3}$ cm$= \frac{2}{3}L$

$x_3 = \frac{3\cdot\pi}{k} = \frac{3\cdot\pi}{k} = \frac{3\cdot\pi}{0.3}$ cm $= 10\pi$ cm $= L$

Problem 16.41

Visa att funktionen $y(x,t) = A\sin(kx)\cos(\omega t)$ (en stående våg) uppfyller vågekvationen.

Vågekvationen:

Vi såg i förra räkneövningen att funktioner $f(x,y) = g(u)$ där $u = x \pm vt$ beskriver vågor som utbreder sig med hastigheten v i positiv/negativ x-riktning.

Alla sådana funktioner är lösningar till vågekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{9}$$

(Eller, med ett annat sätt att notera partiella derivator, $f''_{tt} = v^2 f''_{xx}$).
Detta inses om man deriverar f med avseende på x och t var för sig

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{dg}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dg}{du} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dg}{du}\right) = \frac{d^2 g}{du^2}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d^2 g}{du^2} \tag{10}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{dg}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = \pm v\frac{dg}{du} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \pm v\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dg}{du}\right) = \pm v\frac{d^2 g}{du^2}\frac{\partial u}{\partial t} = v^2\frac{d^2 g}{du^2} \tag{11}$$

Tillsammans ger ekv. (10) och (11)

$$\frac{d^2 g}{du^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{12}$$

Lösning:

Vi gör som i beviset ovan: deriverar y med avseende på x och t var för sig

$$\frac{\partial y}{\partial x} = kA\cos(kx)\cos(\omega t) \quad , \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 A\sin(kx)\cos(\omega t) \tag{13}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\sin(kx)\sin(\omega t) \quad , \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\sin(kx)\cos(\omega t) \tag{14}$$

Om vi bär i åtanke att $v = \omega/k$, kan vi dividera ekv. (13) med ekv. (14)

$$\frac{\partial^2 y/\partial x^2}{\partial^2 y/\partial t^2} = \left(\frac{k}{\omega}\right)^2 = \frac{1}{v^2} \Longleftrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{15}$$