Räkneövning 10

Vågrörelselära & Kvantfysik, FK2002

9 januari 2012

Problem 42.1

Vad är det orbitala rörelsemängdsmomentet, L, för en elektron i *a)* $3p$-tillståndet *b)* $4f$-tillståndet?

Lösning:

Det orbitala rörelsemängdsmomentet låter sig beräknas med hjälp av det orbitala kvanttalet, ℓ, som

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar \tag{1}$$

Huvudkvanttalet, $(n = 1, 2, 3, 4)$, svarar mot vilket elektronskal $(K, L, M, N, ...)$ elektronen befinner sig i. Det orbitala kvanttalet ("ban-kvanttalet", $\ell = 0, 1, 2, 3, ...$) svarar mot underskal $(s, p, d, f, ...)$ och bestämmer elektronens rörelsemängdsmoment. Alltså:

a) $3p \Leftrightarrow (n, \ell) = (3, 1) \Rightarrow L = \sqrt{1(1+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar$
b) $4f \Leftrightarrow (n, \ell) = (4, 3) \Rightarrow L = \sqrt{3(1+3)}\hbar = \sqrt{12}\hbar$

Problem 42.4

Vilka värden för L_z är möjliga för en elektron i ett p-underskal?

Lösning:

p-underskal svarar mot det orbitala kvanttalet $\ell = 1$. I ett pålagt yttre magnetfält är z-komponenten av det orbitala rörelsemängdsmomentet, $L_z = m_\ell \hbar$, där det orbitala magnetiska kvanttalet antar värdena $m_\ell = 0, \pm 1, ..., \pm \ell$. Vi får

$$L_z = m_\ell \hbar = \begin{cases} 0 \\ \pm\hbar \end{cases} \tag{2}$$

Problem 42.29

Lista alla möjliga kvanttal för en Syre-atom i dess grundtillstånd

Lösning:

Syre har $Z = 8$, alltså är möjliga kvanttillstånd (n, ℓ, m_ℓ, m_s),

Skal	Kvanttillstånd	Elektronuppsättning
$K:$	$(1, 0, 0, \pm\frac{1}{2})$	(2 elektroner) $1s^2$
$L:$	$(2, 0, 0, \pm\frac{1}{2})$	(2 elektroner) $2s^2$
$L:$	$(2, 1, -1, \pm\frac{1}{2})$	(2 elektroner) $2p^2$
$L:$	$(2, 1, 0, \pm\frac{1}{2})$	(2 elektroner) $2p^2$

(Notera att $u = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{e}{2m}\vec{L} \cdot \vec{B}$ är *lägst* då $\vec{L}$ är antiparallell med $\vec{B}$, vilket innebär att lägsta energi-tillstånd fås för $m_\ell < 0$)

Problem 42.32

Det orbitala rörelsemängdsmomentet för en silver-atom är noll. *a)* Vad är energierna för elektronens två spinn-riktningar i ett yttre magnetfält $\vec{B} = 0.4\hat{z}$ T? *b)* Vilken frekvens bör en foton ha, så en övergång mellan de två spinn-tillstånden är möjlig?

Lösning:

Med elektronernas "inre" magnetiska momentet (spinn) $\mu_s = \pm\frac{e\hbar}{2m}$ och magnetiska energin $u = \vec{\mu} \cdot \vec{B}$ får vi

$$u_\pm = \pm\frac{e\hbar}{2m} \cdot B = \pm\frac{1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 1.05 \cdot 10^{-34} \cdot 0.4}{2 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}} \text{ [J]} = \pm 3.7 \cdot 10^{-24} \text{ J} \quad (3)$$

Vi får att energiskillnaden mellan de två spinn-tillstånden

$$\Delta E = u_+ - u_- = 2 \cdot 3.7 \cdot 10^{-24} \text{ J} = 7.4 \cdot 10^{-24} \text{ J} \quad (4)$$

En foton bör ha frekvens $f = \frac{\Delta E}{h}$ för att åstadkomma en övergång mellan de två spinn-tillstånden,

$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{7.4 \cdot 10^{-24} \text{ [J]}}{6.63 \cdot 10^{-34} \text{ [Js]}} = 7 \cdot 10^{10} \text{ Hz} \quad (5)$$

Problem 43.11

Beräkna den genomsnittliga bindningsenergin per nukleon för *a)* ${}^{40}_{20}$Ca och *b)* ${}^{197}_{79}$Au.

Lösning:

Den totala bindningsenergin för en kärna ${}^{A}_{Z}$X är

$$E_b = (Z \cdot m_H + N \cdot m_n - m_X)c^2 \tag{6}$$

där Z är antalet protoner (men multiplicerat med massan hos en Väte-atom $m_H = 1.00783$u, för att inkludera elektronmassan), $N = A - Z$ är antalet neutroner (multiplicerat med neutronens massa $m_n = 1.00866$u) och m_X är massan för den sammansatta kärnan.

Den genomsnittliga bindningsenergin per nukleon, $\langle E_b/A \rangle$, blir för ${}^{40}_{20}$Ca (som har $Z = 20$ och $N = A - Z = 20$) samt med $m_{Ca-40} = 39.963707$ u (från Physics Handbook)

$$\begin{aligned} \frac{E_b}{A} &= \frac{(20 \cdot m_H + 20 \cdot m_n - m_{Ca-40})c^2}{40} = \frac{(20 \cdot 1.00783 + 20 \cdot 1.00866 - 39.96371)c^2}{40} \\ &= \frac{(0.366\ [\mathrm{u}]) \cdot c^2}{40} = \{1\ \mathrm{u} = 931.5\ \mathrm{Mev/c^2}\} = \frac{341.21}{40}\ \mathrm{MeV} = 8.53\ \mathrm{MeV} \end{aligned} \tag{7}$$

På samma sätt får vi den genomsnittliga bindningsenergin per nukleon, $\langle E_b/A \rangle$, för ${}^{197}_{79}$Au (som har $Z = 79$ och $N = A - Z = 118$) samt $m_{Au-197} = 196.967$ u (från Physics Handbook)

$$\begin{aligned} \frac{E_b}{A} &= \frac{(79 \cdot m_H + 118 \cdot m_n - m_{Au-197})c^2}{197} = \frac{(79 \cdot 1.00783 + 118 \cdot 1.00866 - 196.967)c^2}{197} \\ &= \frac{(1.6758\ [\mathrm{u}]) \cdot c^2}{197} = \{1\ \mathrm{u} = 931.5\ \mathrm{Mev/c^2}\} = \frac{1561}{197}\ \mathrm{MeV} = 7.92\ \mathrm{MeV} \end{aligned} \tag{8}$$

Svar: Den genomsnittliga bindningsenergin per nukleon är *a)* 8.53 MeV för ${}^{40}_{20}$Ca och *b)* 7.92 MeV för ${}^{197}_{79}$Au. (Kalcium-kärnan är alltså mer stabil...)

Problem 43.16

a) Hur mycket energi krävs för att ta bort en proton från ${}^{12}_{6}$C?
b) Jämför resultatet med bindningsenergin per nukleon.

Lösning:

Att ta bort en proton från ${}^{12}_{6}$C (kol), kvar blir ${}^{11}_{5}$B (bor) kräver energin E,

$$ {}^{12}_{6}C \rightarrow {}^{11}_{5}B + {}^{1}_{1}p \tag{9} $$

Med massorna (från Physics handbook) $m_{C-12} = 12$ u, $m_{B-11} = 11.009306$ u och $m_p = 1.007276$ u får vi

$$ \begin{aligned} E &= \Delta mc^2 = (m_{B-11} + m_p - m_{C-12})c^2 = (11.009306u + 1.007276u - 12u)c^2 \\ &= 0.016582u \cdot c^2 = 15.4 \text{ MeV} = \textbf{Svar a)} \end{aligned} \tag{10} $$

Den genomsnittliga bindningsenergin per nukleon, $\langle E_b/A \rangle$, för ${}^{12}_{6}$C

$$ \begin{aligned} \frac{E_b}{A} &= \frac{(6 \cdot m_H + 6 \cdot m_n - m_{C-12})c^2}{197} = \frac{(6 \cdot 1.00783 + 6 \cdot 1.00866 - 12)u \cdot c^2}{12} \\ &= \frac{(0.09894u) \cdot c^2}{12} = \frac{92.16162}{12} \text{ MeV} = 7.68 \text{ MeV} = \textbf{Svar b)} \end{aligned} \tag{11} $$

Problem 43.19

Radon ${}^{222}_{86}$Rn har halveringstid $T_{1/2} = 3.82$ dagar. Om man mäter aktiviteten $R_0 = 320$ Bq (sönderfall per sekund), hur många radon-kärnor är kvar efter en dag?

Lösning:

Vi söker antalet kärnor $N(t)$ efter $t = 1$ dag. Vi kan beräkna antalet kärnor då mätningen startade, N_0, från sambandet

$$ R_0 = \lambda N_0 \Longrightarrow N_0 = \frac{R_0}{\lambda} = \frac{R_0 T_{1/2}}{\ln 2} \tag{12} $$

Antalet kärnor $N(t)$, vid tiden $t = 1$ dag, blir då

$$ N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = \frac{R_0 T_{1/2}}{\ln 2} e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t} = \frac{320 \cdot (3.82 \cdot 24 \cdot 3600)}{\ln 2} e^{-\frac{1 \cdot \ln 2}{3.82}} = 1.27 \cdot 10^8 \tag{13} $$

Problem 43.25

En uråldrig benknota skall dateras med hjälp av Kol-14-metoden. Vi vet att benet innehåller 80 gram kol, och mäter sönderfallshastigheten med ett instrument som ger $R(t) = 45$ counts/min. Hur gammalt är benet, under antagandet att det ursprungliga mängdförhållandet mellan isotoperna var $\frac{^{14}\mathrm{C}}{^{12}\mathrm{C}} = 1.3 \cdot 10^{-12}$?

Lösning:

Sönderfallshastigheten ("aktiviteten") uppmäts till $R(t) = 45\ \mathrm{min}^{-1} = 0.75\ \mathrm{s}^{-1}$, och beskrivs av

$$R(t) = R_0 e^{-\lambda t} \Longleftrightarrow t = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{R_0}{R(t)}\right) \tag{14}$$

Sönderfallshastigheten R_0 vid tiden $t = 0$ ges av $R_0 = \lambda N_0$ med sönderfallskonstanten,

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0.693}{T_{1/2}} \tag{15}$$

Antalet ^{12}C-kärnor (i 80 gram) är

$$N_{C-12} = \frac{m_{C-12}\ [\mathrm{g}]}{M_{C-12}\ [\mathrm{g/mol}]} \cdot N_A\ [\mathrm{mol}^{-1}] \tag{16}$$

Antalet ^{14}C-kärnor bör (enligt antagandet) från början ha varit

$$N_0 = 1.3 \cdot 10^{-12} \cdot \left(\frac{80\ [\mathrm{g}]}{12\ [\mathrm{g/mol}]} \cdot 6.022 \cdot 10^{23}\ [\mathrm{mol}^{-1}]\right) = 5.217 \cdot 10^{12} \tag{17}$$

Vi får slå upp halveringstiden för ^{14}C ($T_{1/2} = 5730$ år) för att beräkna sönderfallshastigheten vid tiden $t = 0$,

$$R_0 = \lambda N_0 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_0 = \frac{0.693 \cdot 5.217 \cdot 10^{12}}{5730 \cdot 365.24 \cdot 24 \cdot 3600}\ [\mathrm{s}^{-1}] = 20.0\ [\mathrm{s}^{-1}] \tag{18}$$

Nu återstår att beräkna åldern på benet, vilket är tiden t

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{R_0}{R(t)}\right) = \frac{5730\ [\text{år}]}{0.693} \ln\left(\frac{20.0\ [\mathrm{s}^{-1}]}{0.75\ [\mathrm{s}^{-1}]}\right) = 27 \cdot 10^3\ \text{år} \tag{19}$$

Problem 43.40

Isotopen ${}^{218}_{84}$Po kan sönderfalla genom α eller β^--strålning. Hur mycket energi frigörs i de båda fallen?

Lösning:

Alfa-partiklar är helium kärnor ${}^{4}_{2}$He. Vi söker alltså energin som frigörs i sönderfallet

$$ {}^{218}_{84}Po \rightarrow {}^{214}_{82}Pb + {}^{4}_{2}He \tag{20} $$

Beta-sönderfall är när en neutron sönderfaller till en proton inuti kärnan under utstrålning av en elektron och en anti-elektronneutrino ($n^0 \rightarrow p^+ + e^- + \overline{\nu}^0_e$).

$$ {}^{218}_{84}Po \rightarrow {}^{218}_{85}At + {}^{0}_{-1}e + ({}^{0}_{0}\overline{\nu}_e) \tag{21} $$

Massorna $m_{Po-218} = 218.008965u$, $m_{Pb-214} = 213.999801u$, $m_{At-218} = 218.00868u$, $m_{He-4} = 4.002603u$, $m_e = 5.48579903 \cdot 10^{-4}u$ och $m_\nu = 0$ används (det antas att neutrinon är masslös. Kolla gärna in KATRIN-experimentet som försöker mäta neutrinomassan!).

Mass-skillnaden för de båda fallen blir

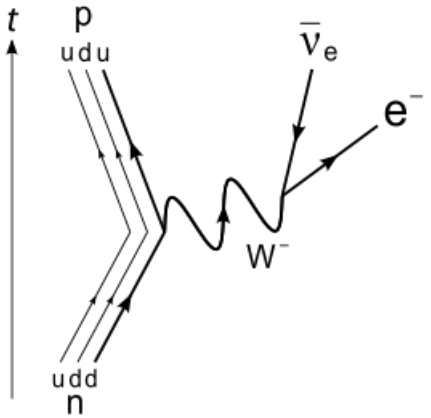
$$ \alpha \quad : \quad \Delta m = m_{Po-218} - (m_{Pb-214} + m_{He-4}) = 6.561 \cdot 10^{-3}u \tag{22} $$

$$ \beta \quad : \quad \Delta m = \underbrace{m_{Po-218} + m_e}_{85e^-} - (\underbrace{m_{At-218}}_{85e^-} + m_e) = 2.85 \cdot 10^{-4}u \tag{23} $$

Med $\Delta E = \Delta mc^2$ och $1u = 931.49$ Mev/c^2 får vi

$$ \alpha \quad : \quad \Delta E = 6.561 \cdot 10^{-3}[u] \cdot 931.49 \text{ [MeV/u]} = 6.11 \text{ MeV} \tag{24} $$

$$ \beta \quad : \quad \Delta E = 2.85 \cdot 10^{-4}[u] \cdot 931.49 \text{ [MeV/u]} = 0.27 \text{ MeV} \tag{25} $$



Figur 1: Feynman-diagram för Beta-sönderfall