Räkneövning 1

Vågrörelselära & Kvantfysik, FK2002

29 november 2011

Problem 16.9

En transversell våg utbreder sig längs en sträng med våghastigheten v. Om man dubblerar spänningen F och håller våglängden λ konstant...

a) Hur ändras vågens frekvens f?
b) Hur ändras våghastigheten v?

Lösning:

Ekvation (16.1) i boken ger sambandet mellan vågens hastighet v [m/s], strängens spänning F [N] och dess linjära massdensitet μ [kg/m]

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \tag{1}$$

Samtidigt vet vi att våghastigheten $v = \lambda f$, vilket innebär att vi kan relatera frekvensen med strängens spänning

$$\lambda f = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Longleftrightarrow f = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \tag{2}$$

Vi ser att frekvensen f är proportionell mot spänningen F som $f \propto \sqrt{F}$. När spänningen dubbleras, $F \to F' = 2F$, ändras $f \to f'$

$$f' = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{F'}{\mu}} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{2F}{\mu}} = \sqrt{2}f \tag{3}$$

På samma sätt ändras våghastigheten $v \to v'$ när spänningen dubbleras, $F \to F' = 2F$

$$v' = \sqrt{\frac{F'}{\mu}} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{2F}{\mu}} = \sqrt{2}v \tag{4}$$

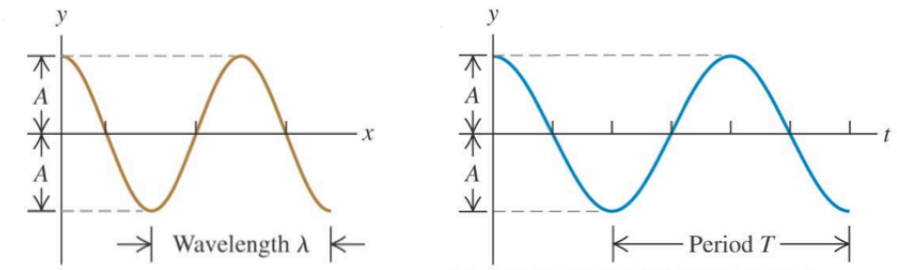
Problem 16.15

Given vågfunktionen $y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$,

a) Vad är lutningen i position x vid tidpunkt t ?
b) Hur är maximal lutning relaterad till våghastighet och maximal partikelhastighet?

Lösning:

$y(x,t)$ är en funktion som beror av två variabler, positionen x och tiden t. Vi kan alltså representera vågen på två sätt:



Figur 1: *Vågfunktionen $y(x,t)$, (till vänster) plottad som $y(x)$ vid en bestämd tid, $t = 0$, eller (till höger) som $y(t)$ i en bestämd punkt, $x = 0$.*

Vi tittar först på lutningen med avseende på rums-koordinaten x,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = kA\cos(kx - \omega t) \tag{5}$$

Lutningen är maximal när $|\cos(kx - \omega t)|$ har sitt maxvärde ($= 1$). Om vi använder sambandet för våghastigheten, $v = \lambda f = \omega/k$, får vi

$$\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{max} = kA\left|\cos(kx - \omega t)\right|_{max} = kA = \frac{\omega A}{v} \tag{6}$$

Partikelhastigheten, v_y (dvs. den hastigheten som mediets partiklar rör sig i y-led), fås genom att ta tidsderivatan

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\cos(kx - \omega t) \tag{7}$$

Med samma resonemang som tidigare får vi den maximala partikelhastigheten,

$$\left|\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{max} = \omega A \tag{8}$$

Nu kan vi slutligen relatera maximal lutning (ekv. 6), maximal partikelhastighet (ekv. 8) och våghastigheten, v

$$\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{max} = \frac{1}{v}\left|\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{max} \tag{9}$$

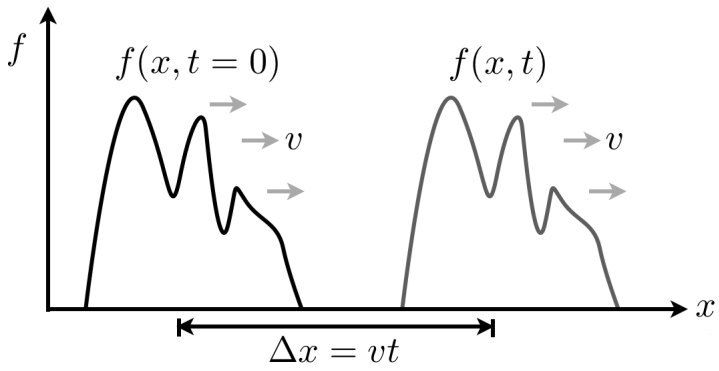
Problem 16.19

Vilka av följande funktioner representerar vandrande vågor?

a) $A\sin^2\left[\pi(t-\frac{x}{v})\right]$ b) $A\cos\left[(kx-\omega t)^2\right]$
c) $A\sin\left[(kx)^2-(\omega t)^2\right]$ d) $Ae^{-\sigma(x-vt)^2}$
e) $A(x+vt)^3$ f) $Ae^{-\alpha t}\cos(kx-\omega t)$

Lösning:

En "vandrande våg"är en störning, f, av ett medium kring dess jämviktsläge, som fortplantar sig med en hastighet, v. (Störningens form är helt godtycklig - den behöver inte alltid vara en snäll sinus-funktion...)



Figur 2: *Konstig vågform med konstant hastighet v, vid två olika tidpunkter.*

Givet vågens form vid en viss tidpunkt, $f(x,t=0)$, vad kan vi säga om vågens utseende $f(x,t)$ vid den senare tidpunkten t? Vi ser att störningen i punkten x vid den senare tiden t ser likadan ut som den gjorde sträckan $\Delta x = vt$ till vänster (i punkten $x-\Delta x = x-vt$). Alltså,

$$f(x,t) = f(x-vt,0) \equiv g(x-vt) \tag{10}$$

Vågor kan ju också utbreda sig i negativ x-riktning, så ett mer allmänt uttryck för en vandrande våg är $f(x,t) = g(x \pm vt)$. Alltså: alla funktioner som låter sig skrivas som $f(x,t) = g(u)$, där variablerna x och t dyker upp i den speciella kombinationen $u \equiv x \pm vt$ är vandrande vågor! (Och de fungerar dessutom som lösningar till den s.k vågekvationen!)

Svar: Funktionerna *a*), *b*), *d*) och *e*) går att skriva som $f(x,t) = g(u)$, där $u \equiv x \pm vt$ och är följdaktligen vandrande vågor. Funktionerna *c*) och *f*) är tyvärr inte det...

Problem 16.21

Givet vågfunktionen $y(x,t) = 0.02\sin(0.4x + 50t + 0.8)$, där enheterna för x och y är cm och t är i sekunder, identifiera:

a) Våglängden, λ
b) Faskonstanten, ϕ
c) Perioden, T
d) Amplituden, A
e) Våghastigheten, v
f) Partikelhastigheten i $x = 1$ cm, $t = 0.5$ s

Lösning:

Ett allmänt uttryck för en harmonisk transversell våg (som utbreder sig i negativ x-riktning) är

$$y(x,t) = A\sin(kx + \omega t + \phi) \tag{11}$$

Då blir det enklare att identifiera;

a) Våglängden, $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0.4}$ cm $= 15.7$ cm
b) Faskonstanten, $\phi = 0.8$
c) Perioden, $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{50}$ s $= 0.13$ s
d) Amplituden, $A = 0.02$ cm
e) Våghastigheten, $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \frac{50}{0.4}$ cm/s $= 125$ cm/s
f) Partikelhastigheten, $v_y(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \omega A\cos(kx + \omega t + \phi)$.
Vi får att $v_y(1, 0.5) = (50 \times 0.02)\cos(0.4 \times 1 + 50 \times 0.5 + 0.8) = 0.48$ cm/s.